

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ КОЛЛОИДНОЙ ХИМИИ И ХИМИИ ВОДЫ
им. А.В.ДУМАНСКОГО**

ПРЕПРИНТ

Г.А.ДЕНИСОВ, Н.И.ЖАРКИХ

ИОНОФОРЕЗ СЛАБОЗАРЯЖЕННОЙ НЕПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЫ

Решена задача о диффузиофорезе слабозаряженной диэлектрической коллоидной частицы сферической формы в многокомпонентном растворе электролита при произвольном соотношении размера частицы и толщины двойного электрического слоя. Скорость движения частицы представлена в виде ряда по целым положительным степеням её дзета-потенциала; в явном виде вычислены члены до квадрата дзета-потенциала включительно.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов мембранного транспорта, электрофореза, хроматографического разделения белков.

Работа будет опубликована в "Коллоидном журнале".

© Научный центр биологических исследований
АН СССР в Пущине, 1988 г.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач биотехнологии является совершенствование существующих [1] и разработка новых, в том числе мембранных [2] методов селективного извлечения целевых продуктов биосинтеза из культуральной жидкости. В последнее время в научной литературе был рассмотрен новый метод интенсификации селективного транспорта заряженных компонентов [3-7], в частности, белков [6-7] через синтетические полимерные мембраны, состоящий в специальном подборе химического состава растворов и создании перепадов концентраций микроионов на мембране. Для полного выявления возможностей этого метода необходимо создание его математической модели [8], [9], в частности, описание переноса заряженных белковых макромолекул при совместном действии градиентов концентрации сразу многих растворенных веществ, то есть диффузиофореза в многокомпонентном растворе. Наиболее простое решение этой задачи может быть получено, если вычислить градиенты электрохимических потенциалов всех ионов в растворе и затем рассматривать диффузиофоретическое движение частицы как алгебраическую сумму движений под действием ионов отдельных сортов — ионофоретических движений. Математический аппарат для такого рассмотрения развит в [10-12]. Там вычислены ионофоретические подвижности частицы с тонким двойным электрическим слоем (ДЭС) при произвольной величине поверхностного потенциала. Однако для описания переноса белков более адекватным представляется рассмотрение другого подмножества характерных параметров задачи, а именно случая слабозаряженных частиц с размером, соизмеримым с толщиной ДЭС. Так, при описании электрофореза белков традиционно используется формула Генри [13]. В данной работе будет получен аналог формулы Генри для ионофоретической и диффузиофоретической подвижностей.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходные уравнения для описания ионофореза под действием ионов сорта i ($i = 1, \dots, n$) выведены в [11, 12]; они включают уравнения Стокса для ползущего течения жидкости (при малых числах Рейнольдса) и уравнение непрерывности для потока ионов с учётом их избытка в ДЭС:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[e^{-z_i \varphi} (\vec{\nabla} \mu_i - \vec{v}/D_i)] &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{\nabla} p + \vec{f}_i &= 0, \quad \vec{f}_i = c_i (e^{-z_i \varphi} - 1) \vec{\nabla} \mu_i. \end{aligned} \quad (I)$$

Здесь η — динамическая вязкость жидкости, D_i — коэффициент диффузии ионов сорта i , z_i — их алгебраическая валентность (положительная для катионов и отрицательная для анионов), μ_i — электрохимический потенциал, c_i — объёмная концентрация, \vec{v} — скорость течения жидкости относительно частицы, p — потоковое давление, \vec{f}_i — потоковая сила, φ — равновесный потенциал ДЭС, измеренный в единицах RT/F (он считается заданным). Граничные условия на поверхности непроводящей непроницаемой для жидкости частицы суть:

$$\vec{v}|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mu_i}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (2)$$

(a — радиус частицы), то есть условия прилипания для скорости и условие отсутствия нормального потока ионов. Граничные условия на бесконечности зависят от того, какое конкретное явление мы рассматриваем; для задачи ионофореза необходимо задать однородный градиент электрохимического потенциала ионов i -го сорта (индекс сорта, если не оговорено противное, здесь и далее опускаем):

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = B \cos \theta \quad (3)$$

(здесь θ — угол между осью симметрии системы и радиусом — вектором \vec{r} , направленным в данную точку из центра частицы) и условие отсутствия полной силы, действующей на частицу:

$$\vec{F} = 0. \quad (4)$$

Поле скорости должно быть регулярно на бесконечности; однородная на бесконечности скорость движения жидкости относительно частицы (взятая с отрицательным знаком) и будет при этом скоростью ионофореза.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Система уравнений (I) в математическом отношении представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами; получить её общее решение, справедливое при всех значениях параметров, не представляется возможным. Будем разыскивать приближённое решение, рассматривая в качестве малого параметра безразмерный потенциал ДЭС φ . В теории электрофореза такой подход разработан в статьях Генри [14], Овербека [15], Буса [16], а в теории диффузиофореза и ионофореза он ранее не применялся. Представим все полевые величины в (I) в виде рядов по целым неотрицательным степеням этой малой величины, не выделяя её явно:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots, \\ p &= p_0 + p_1 + p_2 + \dots, \\ \vec{f} &= \vec{f}_0 + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots, \\ \mu &= \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда для величин нулевого, первого и второго порядков получим соответственно:

$$\begin{aligned} \Delta \mu_0 &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{v}_0 &= 0, \\ \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}_0 - \vec{\nabla} p_0 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mu_1 &= \operatorname{div}[z \varphi (\vec{\nabla} \mu_0 - \vec{v}_0/D)], \\ \operatorname{div} \vec{v}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}_1 - \vec{\nabla} p_1 + \vec{f}_1 &= 0; \quad \vec{f}_1 = -c z \varphi \vec{\nabla} \mu_0, \\ \Delta \mu_2 &= \operatorname{div}[-z^2 \varphi (\vec{\nabla} \mu_0 - \vec{v}_0/D)/2 + z \varphi (\vec{\nabla} \mu_1 - \vec{v}_1/D)], \\ \operatorname{div} \vec{v}_2 &= 0, \\ \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}_2 - \vec{\nabla} p_2 + \vec{f}_2 &= 0; \quad \vec{f}_2 = -c z \varphi \vec{\nabla} \mu_1 + c z^2 \varphi \vec{\nabla} \mu_0/2. \end{aligned} \quad (8)$$

Наша цель — вычислить \vec{v} с точностью до членов второго порядка; при этом надо учесть, что в силу граничных условий члены нулевого порядка в скорости и давлении отсутствуют. Таким образом, нам необходимо вычислить поля μ_0 , μ_1 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 .

Поле μ_0 даётся выражением:

$$\mu_0 = B \cos \theta \left(r + \frac{1}{2r^2} \right) \quad (9)$$

(в формулах (9) - (15) сферический радиус r измеряется в единицах радиуса частицы a). Для вычисления остальных полей необходимо решать неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Если ограничиться полями дипольной симметрии (которые только и могут дать однородную на бесконечности скорость), то нетрудно получить общие решения этих уравнений методом вариации постоянных. Общее решение уравнения Пуассона для электрохимического потенциала

$$\Delta \mu = g(r) \cos \theta$$

имеет вид:

$$\mu = \cos \theta \left[\left(A_5 r + \frac{A_6}{r} \right) - \frac{r}{3} \int_r^\infty \left(1 - \frac{x^3}{r^3} \right) g(x) dx \right],$$

то есть суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, причем последнее выбрано так, что экспоненциально убывает за пределами ДЭС. Применение этой формулы к первому уравнению (7) дает:

$$\mu_1 = \cos \theta B a z \left[\frac{T}{2r^2} + r \int_r^\infty \varphi(x) \left(\frac{1}{x^4} - \frac{x^2}{r^3} \right) dx \right], \quad (10)$$

где

$$T = \int_1^\infty \varphi(x) f_T(x) dx, \quad f_T(x) = 2x^2 + x^{-4}.$$

Общее решение неоднородных уравнений Стокса

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{\nabla} p = (f_r(r) \cos \theta, f_\theta(r) \sin \theta, 0)$$

имеет аналогичную структуру [17]:

$$\begin{aligned} v_r &= \cos \theta \left(A_1 - \frac{2A_2}{r^3} + \frac{A_3 r^2}{10} + \frac{A_4}{r} + V_r \right), \\ v_\theta &= \sin \theta \left(-A_1 - \frac{A_2}{r^3} - \frac{A_3 r^2}{5} - \frac{A_4}{2r} + V_\theta \right), \\ p &= \eta a^{-1} \cos \theta \left(-A_3 r - A_4 / r^2 + Q \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где частные решения вида

$$\begin{aligned} V_r(r) &= -\frac{a^2}{3\eta} \int_1^r dx \left[f_r(x) \left(-x - \frac{x^4}{5r^3} + \frac{r^2}{5x} + \frac{x^2}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + f_\theta(x) \left(x + \frac{4x^4}{5r^3} + \frac{r^2}{5x} - \frac{2x^2}{r} \right) \right], \\ V_\theta(r) &= \frac{a^2}{3\eta} \int_1^r dx \left[f_r(x) \left(-x + \frac{x^4}{10r^3} + \frac{2r^2}{5x} + \frac{x^2}{2r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + f_\theta(x) \left(x - \frac{2x^4}{5r^3} + \frac{2r^2}{5x} - \frac{x^2}{r} \right) \right], \\ Q(r) &= \frac{a}{3\eta} \int_1^r dx \left[f_r(x) \left(\frac{2r}{x} + \frac{x^2}{r^2} \right) + f_\theta(x) \left(\frac{2r}{x} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

также экспоненциально убывают за пределами ДЭС.

Преобразуем (11), (12) так, чтобы непосредственно получить скорость ионофореза. Для этого учтём, что для регулярности скорости на бесконечности необходимо положить $A_3 = 0$; в силу условия (4) A_4 также равно нулю (поскольку $F = -4\pi a \eta A_4$ [17]). Коэффициенты A_1 и A_2 определяются из условий (2):

$$A_1 - 2A_2 + V_r(1) = 0; \quad -A_1 - A_2 + V_\theta(1) = 0,$$

откуда получаем, что интересующий нас коэффициент A_1 , то есть модуль скорости на бесконечности, равен

$$V_{iph} = A_1 = \frac{2}{3} V_\theta(1) - \frac{1}{3} V_r(1).$$

Подставляя сюда выражения (12), приходим к формуле:

$$V_{iph} = \frac{a^2}{9\eta} \int_1^\infty dx \left[f_r \left(-3x + \frac{1}{x} + 2x^2 \right) + f_\theta \left(3x + \frac{1}{x} - 4x^2 \right) \right], \quad (13)$$

которая даёт вклад в скорость ионофореза того порядка по потенциалу ДЭС, какого порядка член в объёмной силе подставлен в неё. Применяя эту формулу к уравнениям (7) и (8), получаем соответственно:

$$V_{iph_1}(\varphi) = \frac{a^2 c z B}{3 \eta} \int_1^\infty dx \varphi(x) f_1(x), \quad (I4)$$

$$V_{iph_2}(\varphi) = \frac{a^2 c z^2 B}{9 \eta} \int_1^\infty dx \varphi(x) [T f_2(x) + \\ + \varphi(x) f_3(x) + \int_x^\infty dy \varphi(y) f_4(x, y)], \quad (I5)$$

$$\text{где } f_1(x) = -2x^2 + 2x - 1/2x^2 + 1/2x^4, \\ f_2(x) = 3(x^{-1} - x)/2x^3, \quad f_3(x) = x^2 + x^{-1} - 9/4x^2 + \\ + 1/4x^4, \quad f_4(x, y) = 6x(1-x)/y^4 + 3y^2(x - x^{-1})/x^3. \quad (I6)$$

Нетрудно показать, что с увеличением толщины двойного слоя V_{iph_2} убывает и при бесконечной толщине ДЭС обращается в ноль.

§ 4. СТРОЕНИЕ РАВНОВЕСНОГО ДВОЙНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Чтобы практически воспользоваться формулами (I4), (I5) для расчета ионофоретических подвижностей, необходимо подставить в них выражения для равновесного потенциала ДЭС слабозаряженной сферической частицы с двойным слоем произвольной толщины. Это выражение должно включать члены вплоть до квадрата ζ -потенциала включительно (ζ -потенциалом будем называть потенциал поверхности частицы, измеренный в единицах RT/F). Если линейный по ζ -потенциалу член не зависит от состава электролита (зависит только от его ионной силы), то квадратичный по потенциалу член зависит и от состава раствора. Чтобы вычислить эти члены, запишем уравнение Пуассона-Больмана

$$\Delta \varphi = - \frac{4\pi F^2}{\epsilon RT} \sum_i c_i z_i e^{-z_i \varphi} \quad (I7)$$

с краевыми условиями:

$$\varphi|_{r=a} = \zeta, \quad \varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (I8)$$

Воспользовавшись малостью ζ -потенциала, разложим (I7) в ряд по степеням φ :

$$\Delta \varphi = \kappa^2 (\varphi - \lambda \varphi^2/2), \quad (I9)$$

где $\kappa^2 = 4\pi F^2 \sum_i c_i z_i^2 / \epsilon RT$ - квадрат обратного дебаевского радиуса, а величину $\lambda = \sum_i c_i z_i^3 / \sum_i c_i z_i^2$ можно назвать асимметрией раствора. Величина λ обычно по абсолютной величине не превосходит 1 и только для бинарного 3:1 электролита достигает 2. Разложим теперь φ в ряд по степеням ζ -потенциала:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

и получим для отдельных членов разложения уравнения:

$$\Delta \varphi_1 = \kappa^2 \varphi_1, \quad (20)$$

$$\Delta \varphi_2 = \kappa^2 (\varphi_2 - \lambda \varphi_1^2/2). \quad (21)$$

Величина φ_1 должна удовлетворять краевым условиям (I8), а φ_2 - нулевым краевым условиям на обеих границах. Решения уравнений (20), (21) имеют вид:

$$\varphi_1(x) = \zeta \frac{\kappa a}{x} e^{-(x - \kappa a)}, \quad (22)$$

$$\varphi_2(x) = T_1 \frac{e^{-x}}{x} - I_1(x) \frac{e^{-x}}{x} + I_2(x) \frac{e^x}{x}, \quad (23)$$

где $T_1 = I_1(\kappa a) - e^{2\kappa a} I_2(\kappa a)$; $I_{1,2}(x) = \int_x^\infty dy \lambda \varphi_1^2(y) y e^{\pm y/4}$, а переменные x и y измерены в единицах κ^{-1} . Теперь для получения ионофоретической подвижности не в виде ряда по степеням φ , а в виде ряда по степеням параметра ζ нужно перегруппировать члены в разложении (I4), (I5). Подстановка φ_1 в (I4) даст единственный член, линейный по ζ ; подстановка φ_2 в (I4) и φ_1 в (I5) даст члены, квадратичные по ζ . Подставлять φ_2 в (I5) не нужно, так как это даст члены $O(\zeta^3)$, которые не учитывались в расчете.

§ 5. РАСЧЕТ СКОРОСТИ ДИФфуЗИОФОРЕЗА В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ РАСТВОРЕ.

Скорость движения частицы под действием градиентов концентрации одновременно всех растворенных веществ равна сумме скоростей ионофоретических движений, то есть членов вида (I4) и (I5), просуммированных по всем сортам ионов. Интегралы, входящие в эти выражения (с учетом (22), (23)) зависят от xa и могут быть вычислены и протабулированы с помощью ЭВМ. Удобнее, однако, предварительно провести указанное выше суммирование, используя для B_i конкретные представления

$$\vec{B}_i = RT(\vec{\nabla} c_i / c_i + z_i \vec{\nabla} \varphi), \quad B_i = |\vec{B}_i|,$$

и лишь затем табулировать возникающие интегральные выражения. При этом скорость частицы будет иметь традиционный вид [I8] суммы двух вкладов - вклада, обусловленного электрофорезом в поле диффузионного потенциала микроионов, и вклада за счет осмотической компоненты диффузиофореза. Первый вклад для слабозаряженных частиц с ДЭС произвольной толщины уже рассчитан в теории Овербека - Буса - Вирсема [I9]. Расчет второго вклада до сих пор был проведен только для частиц с тонким ДЭС [20, 2I].

Суммирование коэффициентов при интегралах в (I4), (I5) по всем сортам ионов дает (после замены B_i на \vec{B}_i):

$$\sum_{i=1}^n \frac{a^2 c_i z_i \vec{B}_i}{3\eta} = - \frac{\epsilon}{6\pi\eta} \frac{RT}{\mathcal{F}} \vec{E} \frac{(xa)^2}{2},$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a^2 c_i z_i^2 \vec{B}_i}{9\eta} = - \lambda \frac{\epsilon}{18\pi\eta} \frac{RT}{\mathcal{F}} \vec{E} \frac{(xa)^2}{2} + \frac{\epsilon}{18\pi\eta} \left(\frac{RT}{\mathcal{F}} \right)^2 \frac{\vec{\nabla} I}{I} \frac{(xa)^2}{2}.$$

Здесь $\vec{E} = -RT\vec{\nabla}\varphi/\mathcal{F}$ - напряженность поля диффузионного потенциала микроионов, $I = \sum_i c_i z_i^2$ - ионная сила раствора. Скорость движения частиц с точностью до членов порядка $O(\xi^2)$ включительно запишется в виде

$$\vec{V} = \frac{\epsilon \xi}{6\pi\eta} \frac{RT}{\mathcal{F}} \vec{E} f(xa) + \lambda \frac{\epsilon \xi^2}{6\pi\eta} \frac{RT}{\mathcal{F}} \vec{E} g(xa) + \frac{\epsilon \xi^2}{32\pi\eta} \left(\frac{RT}{\mathcal{F}} \right)^2 \frac{\vec{\nabla} I}{I} h(xa), \quad (24)$$

где

$$f(xa) = - \frac{(xa)^2}{2} \int_{xa}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-(x-xa)} f_1\left(\frac{x}{xa}\right), \quad (25)$$

$$h(xa) = \frac{8}{9} (xa)^2 \int_{xa}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-(x-xa)} \left[f_2\left(\frac{x}{xa}\right) \int_{xa}^{\infty} \frac{dy}{y} e^{-(y-xa)} \times f_T\left(\frac{y}{xa}\right) + \frac{xa}{x} e^{-(x-xa)} f_3\left(\frac{x}{xa}\right) + \int_{xa}^{\infty} \frac{dy}{y} e^{-(y-xa)} f_4\left(\frac{x}{xa}, \frac{y}{xa}\right) \right], \quad (26)$$

$$g(xa) = - \frac{3}{16} h(xa) + \frac{(xa)^3}{8} \int_{xa}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-(x-xa)} f_1\left(\frac{x}{xa}\right) e^{2x} \times [Ei(-xa) - e^{2xa} Ei(-3xa) - Ei(-x) + e^{2x} Ei(-3x)]; Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy. \quad (27)$$

Подчеркнем, что выражение (24) справедливо в случае многокомпонентного раствора произвольного состава.

Первый член суммы (24) представляет собой скорость электрофореза в приближении Генри [I4], второй член обусловлен валентной асимметрией электролита и возникает в теории электрофореза Овербека [I5]. Относительно функции h в третьем члене суммы ранее было известно, что при $xa \rightarrow \infty$ она должна обращаться в 1 [20], а при достаточно больших xa , согласно [2I], $h \approx 1 - 21/2xa + O[(xa)^{-2}]$.

Вычисление функций $f(xa)$, $g(xa)$ и $h(xa)$ может быть проведено следующим образом. Все интегралы, входящие в выражения (25)-(27), заменой переменных приводятся к виду

$$\int_0^{\infty} e^{-x} R_1(x) dx \quad \text{либо} \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} R_2(x, y) dx dy, \quad (28)$$

где $R_i, i=1,2$ - рациональные функции своих аргументов. Интегралы вида (28) вычисляются приближенно с помощью квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности

$$\int_0^{\infty} e^{-x} R_1(x) dx \approx \sum_{s=1}^m K_s R_1(x_s),$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} R_2(x, y) dx dy \approx \sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^m K_s K_p R_2(x_s, y_p),$$

где координаты x_s узлов интегрирования и значения коэффициентов K_s приведены в [22] .

В таблице I представлены результаты расчетов для $m = 15$; для сравнения там же приведены значения выражения $6/f(xa)$ из монографии [13] , рассчитанные М.Гориным в 1941 году.

Таблица I

Значения функций $6/f(xa)$, $g(xa)$ и $h(xa)$.

xa	$6/f[13]$	$6/f$	g	h
10^{-8}		6.00	$1.67 \cdot 10^{-9}$	$4.44 \cdot 10^{-9}$
10^{-7}		6.00	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$4.45 \cdot 10^{-8}$
10^{-6}		6.00	$1.659 \cdot 10^{-7}$	$4.498 \cdot 10^{-7}$
10^{-5}		6.00	$1.568 \cdot 10^{-6}$	$4.980 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}		6.00	$0.668 \cdot 10^{-5}$	$9.764 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}		6.00	$-0.775 \cdot 10^{-3}$	$5.454 \cdot 10^{-3}$
0.01		6.00	$-0.513 \cdot 10^{-1}$	0.286
0.1		5.996	-0.129	0.781
1.0	5.844	5.844	$-0.186 \cdot 10^{-1}$	0.475
2.0	5.631	5.633	$0.164 \cdot 10^{-1}$	0.399
3.0	5.450	5.450	$0.324 \cdot 10^{-1}$	0.380
4.0	5.298	5.299	$0.403 \cdot 10^{-1}$	0.385
5.0	5.175	5.174	$0.441 \cdot 10^{-1}$	0.401
10.0	4.843	4.789	$0.444 \cdot 10^{-1}$	0.493
25.0	4.38	4.397	$0.296 \cdot 10^{-1}$	0.705
100.0	4.11	4.114	$0.100 \cdot 10^{-1}$	0.905
10^3		4.012	$0.111 \cdot 10^{-2}$	0.9896
10^4		4.001	$0.112 \cdot 10^{-3}$	0.9989
10^5		4.000	$0.1125 \cdot 10^{-4}$	1.000

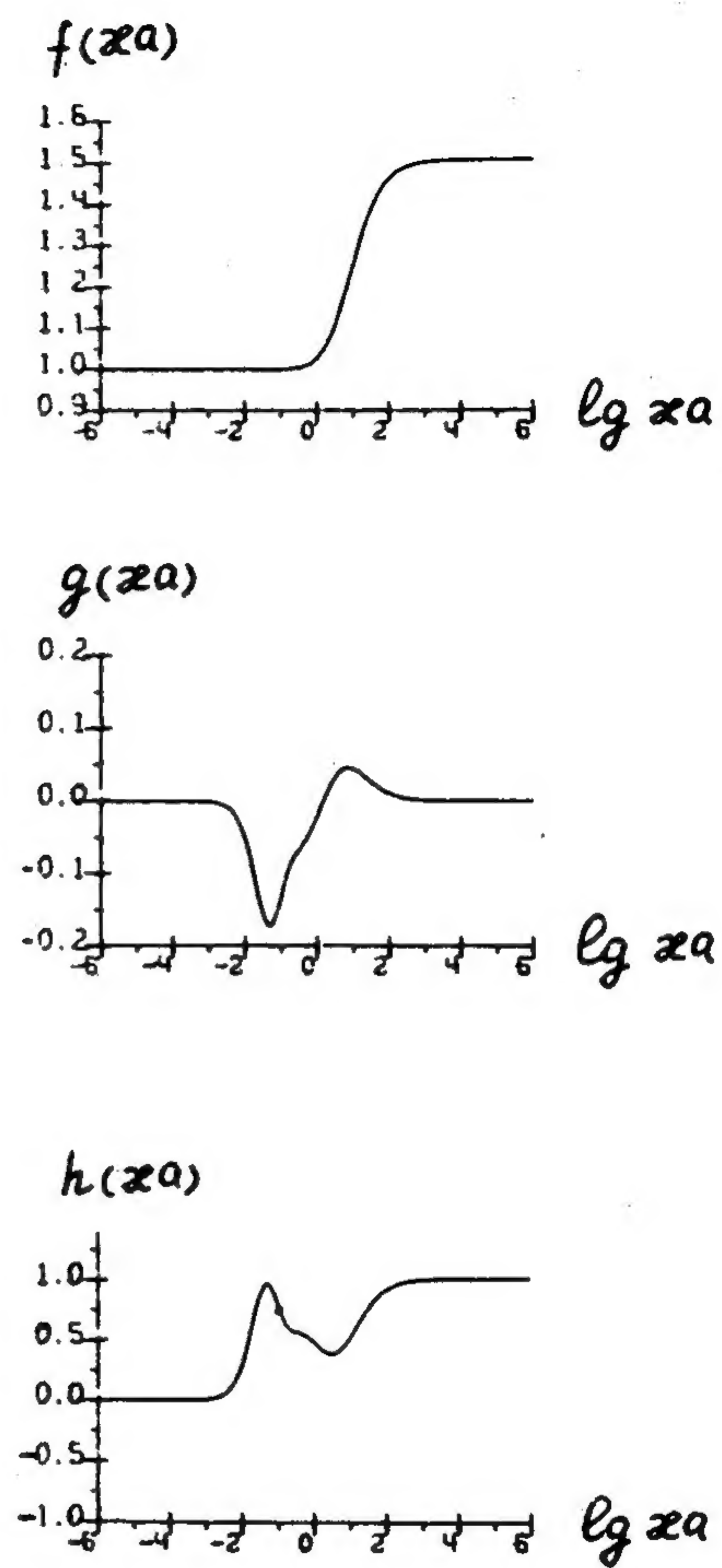


Рис. I. Графики f , g и h как функций аргумента $lg xa$.

Данные численных расчетов (см. таблицу I) согласуются с результатами асимптотического анализа выражений (25) - (27) при $\kappa a \rightarrow 0$ и $\kappa a \rightarrow \infty$. Так, при $\kappa a \rightarrow \infty$ имеем, опуская члены порядка $O[(\kappa a)^{-2}]$:

$$f(\kappa a) \approx \frac{3}{2} - \frac{9}{2\kappa a}, \quad g(\kappa a) \approx \frac{9}{8\kappa a}, \quad h(\kappa a) \approx 1 - \frac{21}{2\kappa a}.$$

Отметим, что последнее выражение (для $h(\kappa a)$) совпадает с результатом работы [21], полученным для малых значений дзета-потенциала (см. [21], формула (3.29)).

При $\kappa a \rightarrow 0$ с точностью до членов $O[(\kappa a)^2]$ имеем:

$$f(\kappa a) \approx 1, \quad g(\kappa a) \approx \frac{\kappa a}{6}, \quad h(\kappa a) \approx \frac{4}{9} \kappa a.$$

На рис. I показаны графики f , g и h в функции аргумента $\lg \kappa a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самсонов Г.В., Меленевский А.Т. Сорбционные и хроматографические методы физико-химической биотехнологии. - Л.: Наука, 1986, 230 с.
2. Strathmann H. Trends in Biotechnol., 1985, v. 3, No 4, p. 112.
3. Shimidzu T., Yoshikawa M., Kawakatsu K. - Polym J., 1980, v. 12, No 6, p. 363.
4. Ogata N., Kohei S., Fujimura H. - J. Appl. Polym. Sci., 1980, v. 25, No 7, p. 1419.
5. Uragami T., Watanabe S., Sugihara M. - J. Polym. Sci., Polym. Chem. Ed., 1982, v. 20, No 5, p. 1193.
6. Shataeva L.K., Samsonov G.V., Vacik J., Koreček J., Kalál J. - J. Appl. Polym. Sci., 1979, v. 23, p. 2245.
7. Shataeva L.K., Denisov G.A., Lazarev P.I. - Synthetic Polymeric Membranes (B. Sedláček, J. Kahovek, eds.). Berlin e.a.: de Gruyter, 1987, p. 35.
8. Denisov G.A., Lazarev P.I. - Synthetic Polymeric Membranes (B. Sedláček, J. Kahovek, eds.). Berlin e.a., de Gruyter, 1987, p. 431.
9. Денисов Г.А., Лазарев П.И., Шатаева Л.К. - Препринт ОНТИ ИЦБМ, Пущино, 1987, 13 с.
10. Шилов В.Н., Жарких Н.И., Борковская Ю.Б. - Коллоидн. ж., 1985, т. 47, № 4, с. 757.
11. Шилов В.Н., Жарких Н.И., Борковская Ю.Б. - Коллоидн. ж., 1985, т. 47, № 5, с. 927.
12. Жарких Н.И., Борковская Ю.Б. Ионифорез коллоидов. - В кн.: Физико-химическая механика и лиофильность дисперсных систем, вып. 17, Киев, Наукова Думка, 1985, с. 76-91.
13. Abramson H.A., Moyer L.S., Gorin M.H. - Electrophoresis of Proteins. New York: Hafner, 1964, 341 p.
14. Henry D. Proc Roy. Soc. A, 1931, v. 133, No 1, p. 106.
15. Overbeek T. - Kolloid Beih., 1943, B. 54, No 2, S. 287.
16. Booth F. Proc. Roy. Soc. A, 1950, v. 203, No 3, p. 514.
17. Хашпель Дж., Бреннер Г. - Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976, 632 с.
18. Дерягин Б.В., Духин С.С., Короткова А.А. - Коллоидн. ж., 1961, т. 23, № 1, с. 53.
19. Духин С.С., Дерягин Б.В. - Электрофорез. М.: Наука, 1976, 328 с.

20. Духин С.С., Дерягин Б.В., Ульберг З.Р., Кузнецова Т.В.
Коллоидн. ж., 1980, т. 42, № 3, с. 464.

21. Prieve D.C., Anderson J.L., Ebel J.P., Lowell M.E. -
J. Fluid, Mech., 1984, v. 148, p. 247.

22. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.:
Физматгиз, 1959, с. 128.